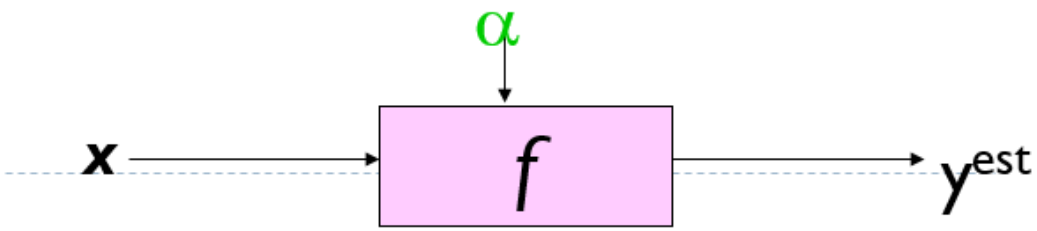
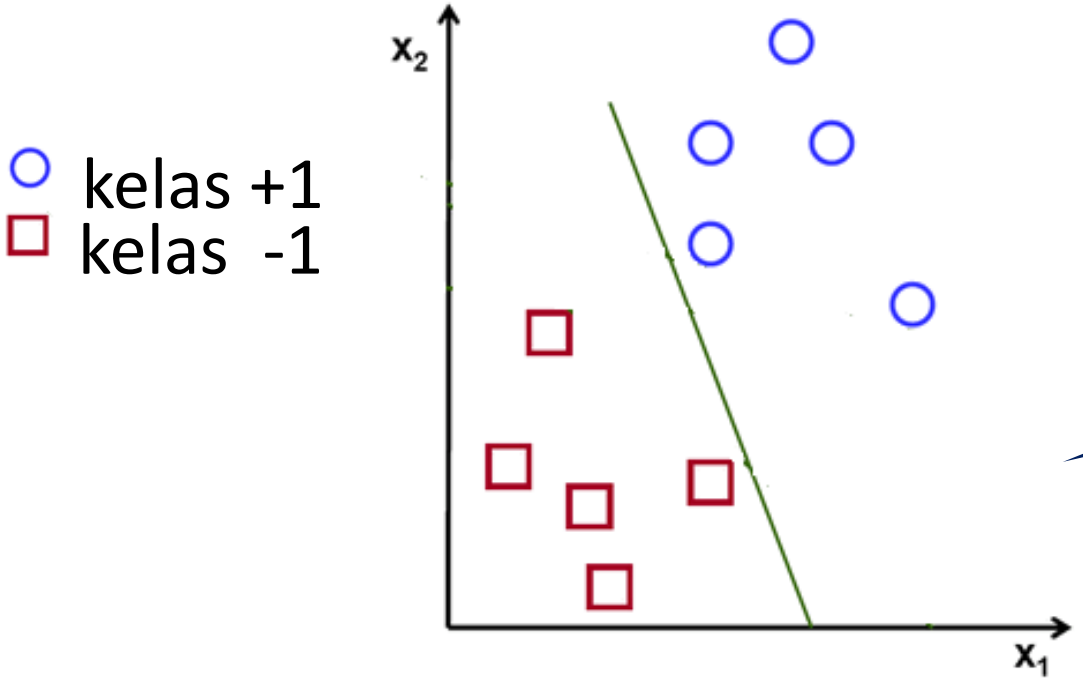
SUPERVISED LEARNING

~Support Vector Machine~

Linear Classifiers

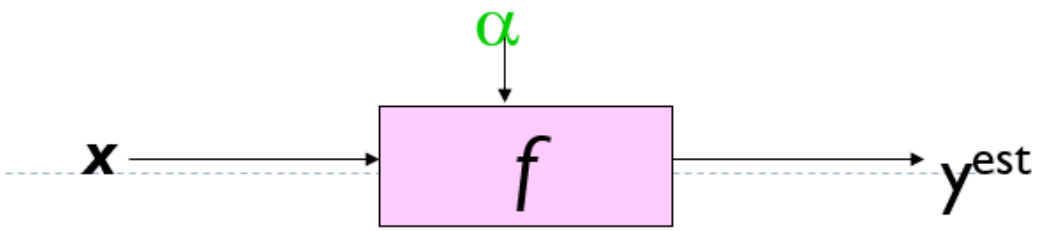


$f(\mathbf{x},\mathbf{w},b) = sign(\mathbf{w}.\mathbf{x} - b)$

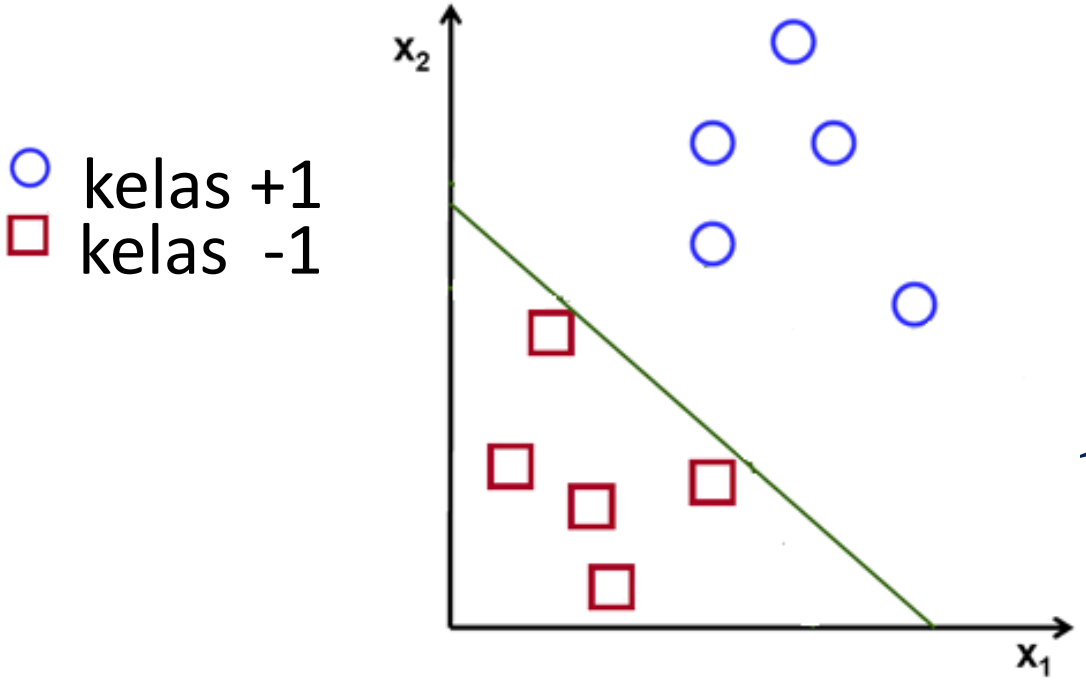


Bagaimana mengklasifikasikan data ini?

Linear Classifiers

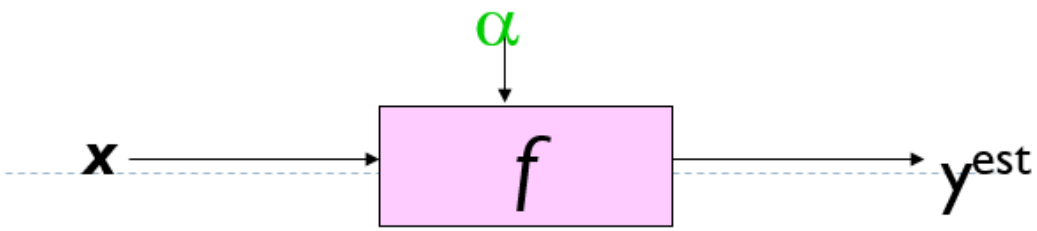


$$f(x,w,b) = sign(w.\,x - b)$$

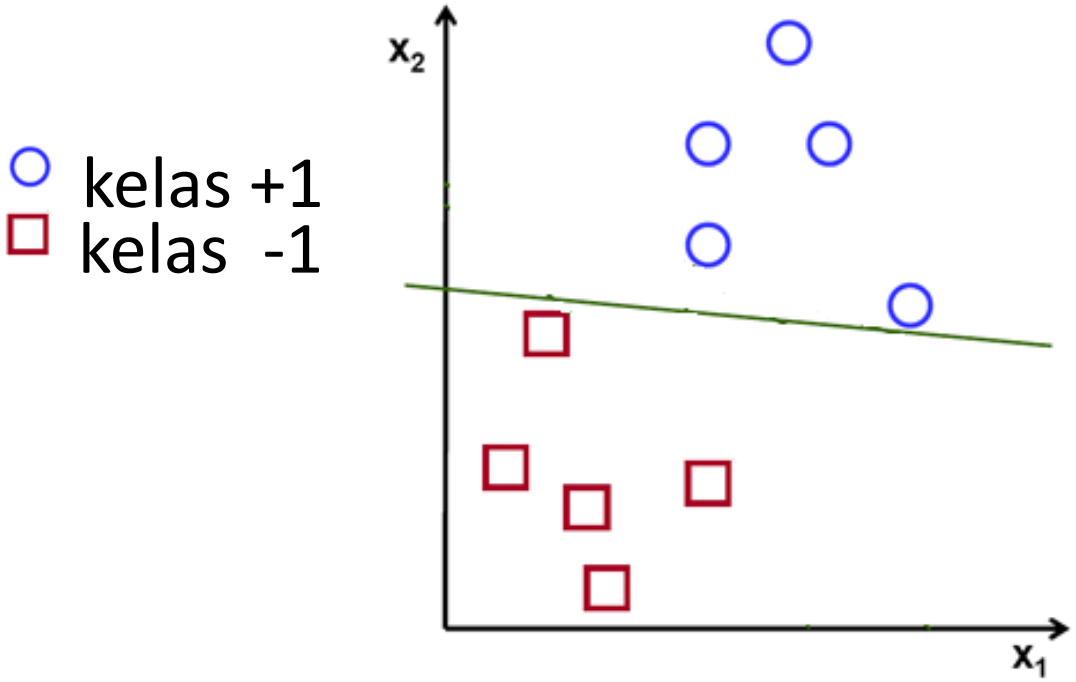


Bagaimana mengklasifikasikan data ini?

Linear Classifiers

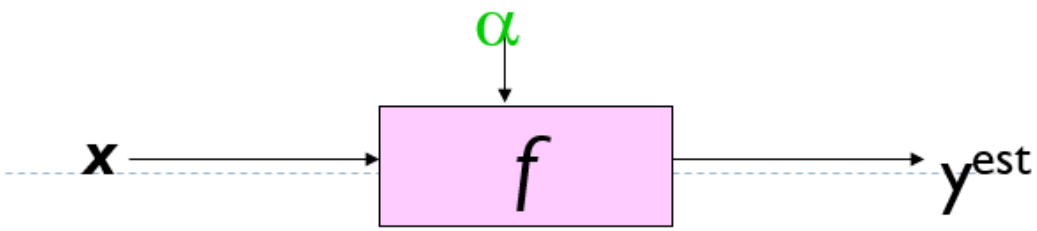


$$f(x,w,b) = sign(w.\,x - b)$$

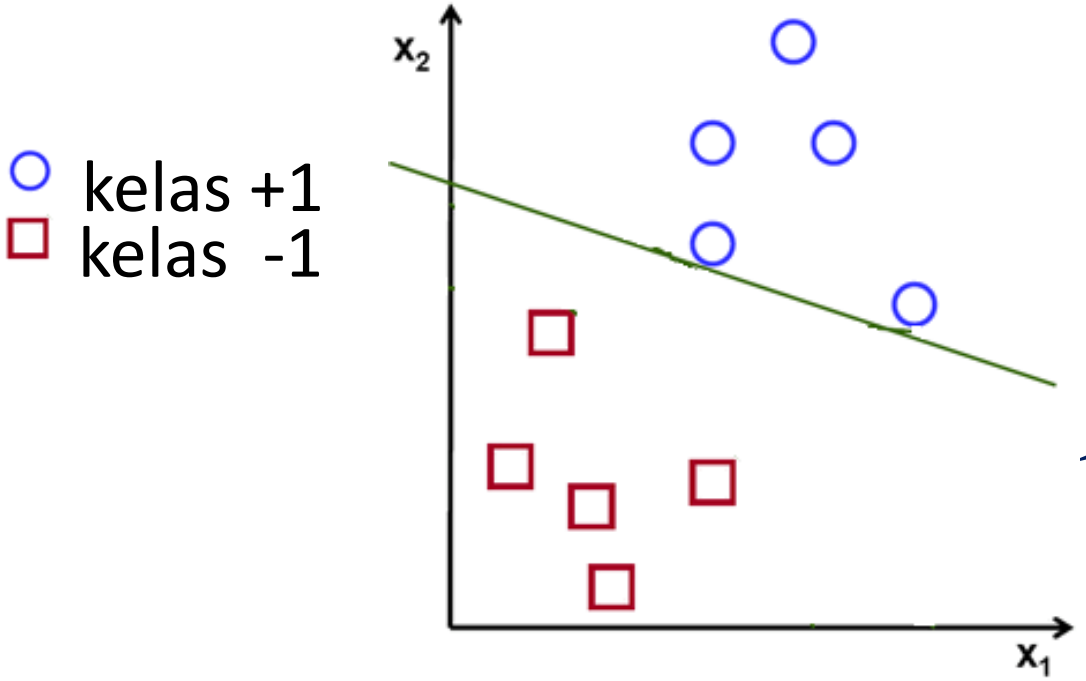


Bagaimana mengklasifikasikan data ini?

Linear Classifiers

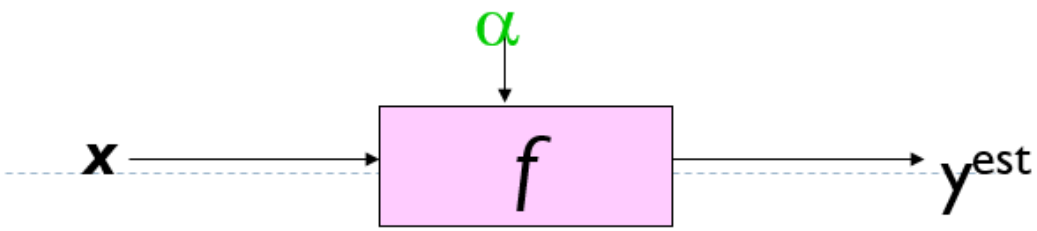


$f(\mathbf{x},\mathbf{w},b) = sign(\mathbf{w}.\mathbf{x} - b)$



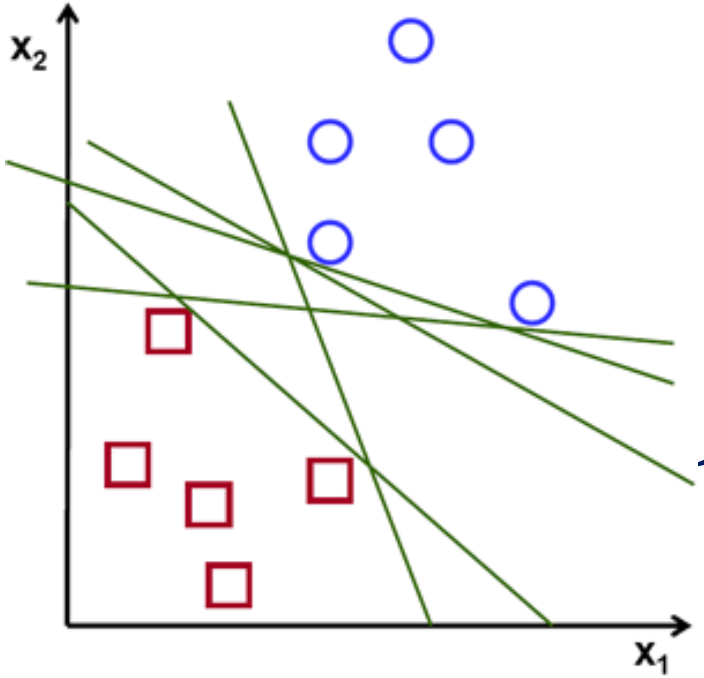
Bagaimana mengklasifikasikan data ini?

Linear Classifiers



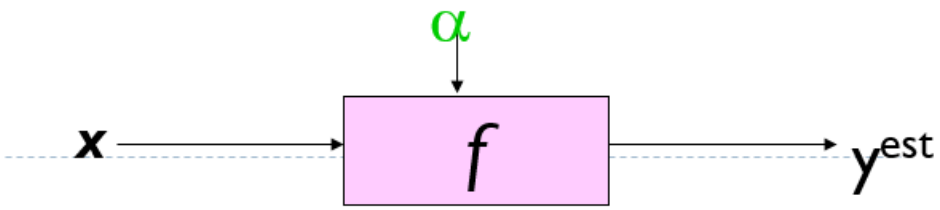
$$f(\mathbf{x},\mathbf{w},b) = sign(\mathbf{w}.\mathbf{x} - b)$$

○ kelas +1
□ kelas -1



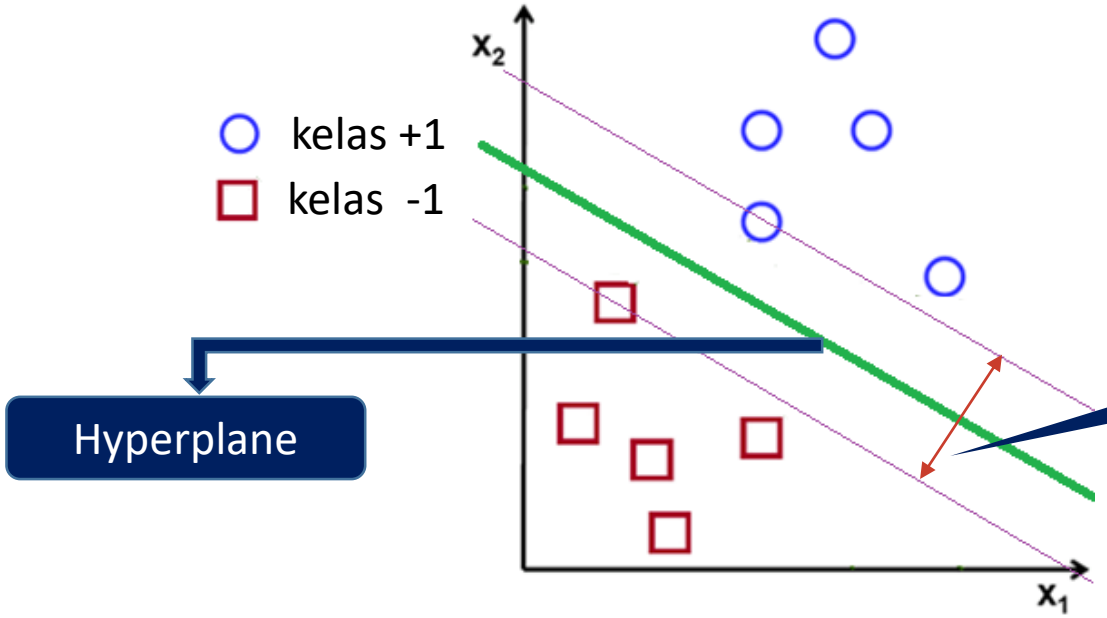
Yang mana yang terbaik?
(Hyperplane terbaik)?

Classifiers Margin



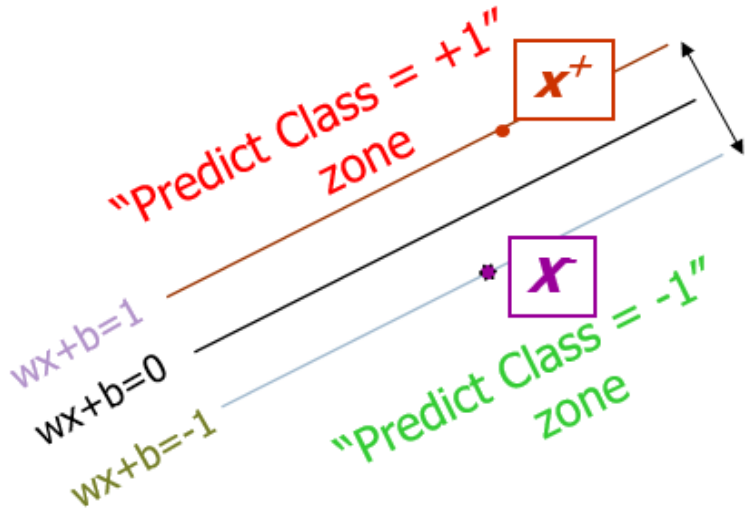
$f(x,w,b) = sign(w.x - b)$

Ide dasar SVM: **memaksimalkan distance (jarak) antara *hyperplane* dan titik sampel terdekat**



Definisikan **margin/batas** linear classifier sebagai lebarnya dimana batas tersebut dapat dimaksimalkan sebelum mencapai titik data

Linear SVM secara Matematis



- $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}^+ + b = +1$
- $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}^- + b = -1$
- $\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{x}^-) = 2$

$$M = \frac{(x^+ - x^-) \cdot w}{|w|} = \frac{2}{|w|}$$

Dimana,
M: Margin
w: bobot
x^+: support vector kelas +1
x^-: support vector kelas -1

Problem Optimasi

- $\{x_1, \ldots, x_n\}$ adalah data set dan $y_i \in \{1, -1\}$ adalah kelas label dari $\boldsymbol{x_i}$
- Batas keputusan harus dapat mengklasifikasi semua titik dengan benar

$$y_i(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i + b) \geq 1, \qquad \forall i$$

- Problem optimasi terbatas

meminimalkan $\frac{1}{2}||\mathbf{w}||^2$

dimana $y_i(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i + b) \geq 1 \qquad \forall i$

Problem Optimasi

- Kita dapat mengubah problem menjadi bentuk dual

$$\text{max.} \quad W(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$$

dimana $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$

- Problem *quadratic programming* (QP)
  - Global maximum pada α_i dapat selalu ditemukan
- $\boldsymbol{w}$ dapat diperbaiki menjadi $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \mathbf{x}_i$

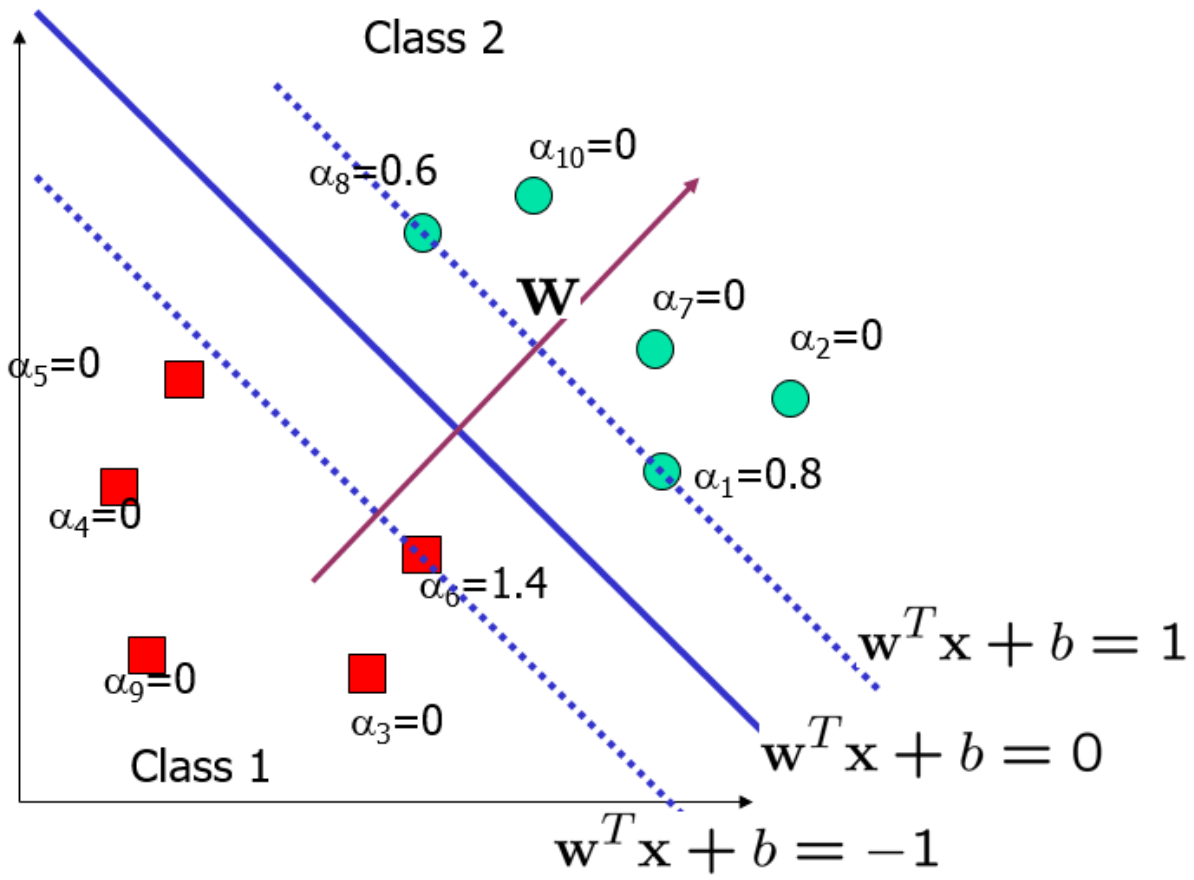
Karakteristik Solusi

- Kebanyakan nilai α_i adalah nol
- $\boldsymbol{x_i}$ dengan nilai α_i positif disebut sebagai *support vectors* (SV)
  - Batas keputusan ditentukan oleh SV
  - Let t_j (j=1, ..., s) adalah indeks dari SV

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{t_j} y_{t_j} \mathbf{x}_{t_j}$$

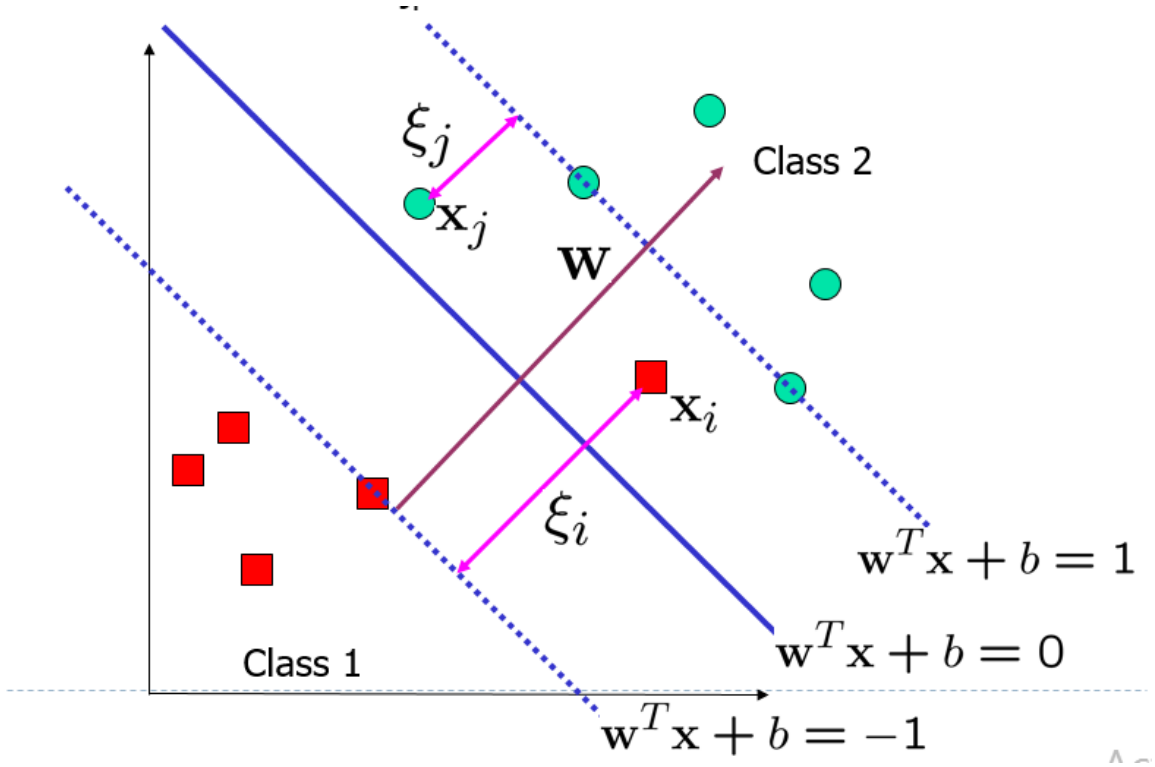
- Untuk testing dengan data baru ($\boldsymbol{z}$)
  - Hitung $\mathbf{w}^T\mathbf{z} + b = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{t_j} y_{t_j} (\mathbf{x}_{t_j}^T \mathbf{z}) + b$
  - Dan klasifikasikan $\boldsymbol{z}$ sebagai kelas 1 jika jumlahnya positif, selain itu diklasifikasikan sebagai kelas 2

Interpretasi Geometri



Tidak dapat Dipisahkan secara Linier?

Memperbolehkan adanya *error* (ξ) pada klasifikasi



Bagaimana jika titik sampel tidak dapat dipisahkan secara linier?

Soft Margin Hyperplane

- Definisikan ξ_i=0 jika tidak ada error untuk $\boldsymbol{x_i}$
  - ξ_i adalah variabel untuk mendefinisikan nilai error

$$\begin{cases} \mathbf{w}^T\mathbf{x}_i + b \geq 1 - \xi_i & y_i = 1 \\ \mathbf{w}^T\mathbf{x}_i + b \leq -1 + \xi_i & y_i = -1 \\ \xi_i \geq 0 & \forall i \end{cases}$$

- Minimalkan $\frac{1}{2}||\mathbf{w}||^2 + C\sum_{i=1}^{n}\xi_i$
  - *C* : tradeoff parameter antara error dan margin
- Problem optimasi menjadi

$$\frac{1}{2}||\mathbf{w}||^2 + C\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

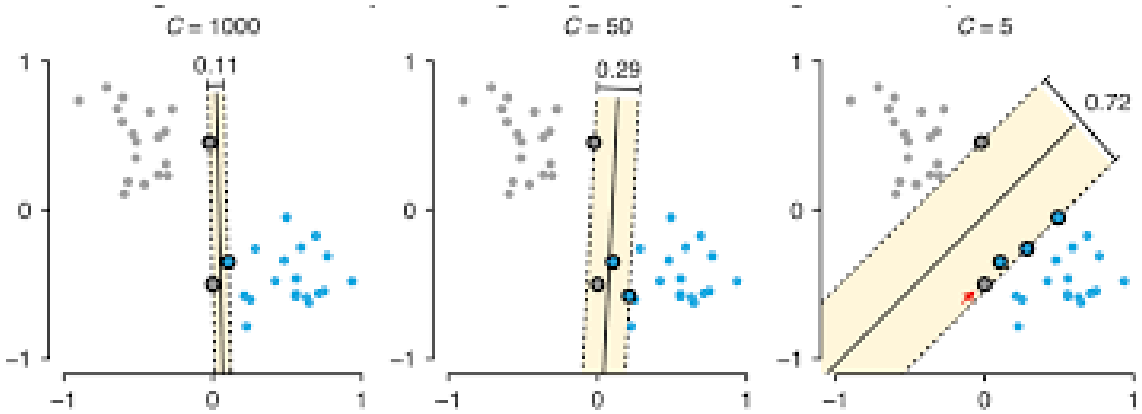
$$y_i(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i + b) \geq 1 - \xi_i, \quad \xi_i \geq 0$$

Soft Margin Hyperplane

- Menemukan nilai yang tepat untuk *C* menjadi salah satu masalah dalam SVM

Nilai ***C*** berperan dalam mengontrol *overfitting*.

- ***C*** besar → lebih sedikit sampel training yang berada di posisi yang tidak ideal (artinya lebih sedikit error, sehingga berdampak positif pada kinerja *classifier*) → **C terlalu besar menyebabkan *overfitting***
- ***C*** kecil → lebih banyak sampel training yang tidak berada pada posisi ideal (artinya akan banyak error training sehingga berdampak negatif pada kinerja *classifier*) → **C terlalu kecil menyebabkan *underfitting***



Permasalahan Non-linear

Ide: transformasi $\boldsymbol{x_i}$ ke ruang berdimensi lebih tinggi untuk memudahkan perhitungan

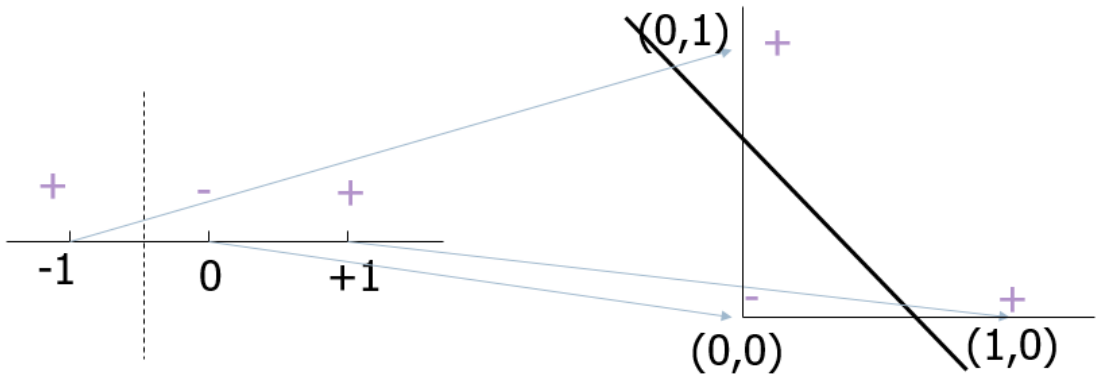
- Ruang Input : ruang $\boldsymbol{x_i}$
- Ruang Fitur: ruang $\phi(\boldsymbol{x_i})$ setelah transformasi

Mengapa perlu transformasi?

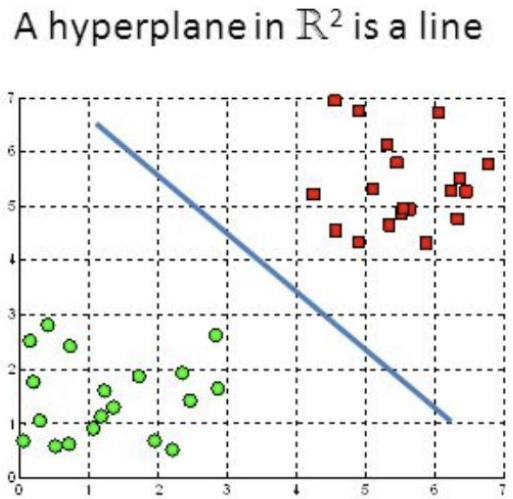
- Operasi linear pada ruang fitur ekivalen dengan operasi non-linear pada ruang input
- Proses klasifikasi lebih mudah dilakukan dengan transformasi.

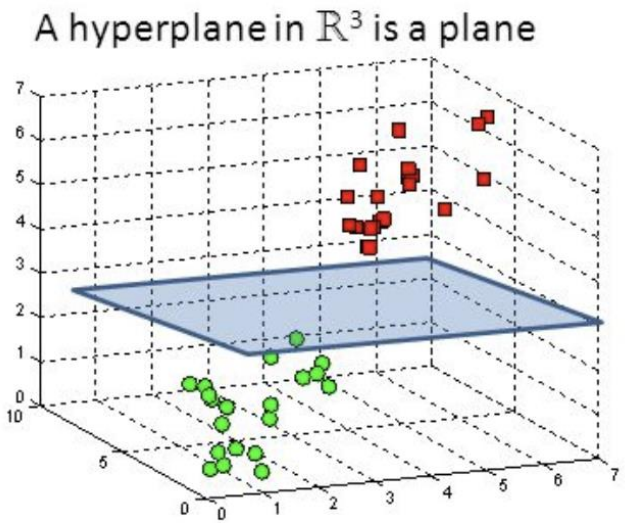
Dimensi Tinggi

Proyeksikan data ke ruang berdimensi tinggi agar data-data tersebut dapat dipisahkan secara linear dan dapat menggunakan linear SVM – (Using Kernels)



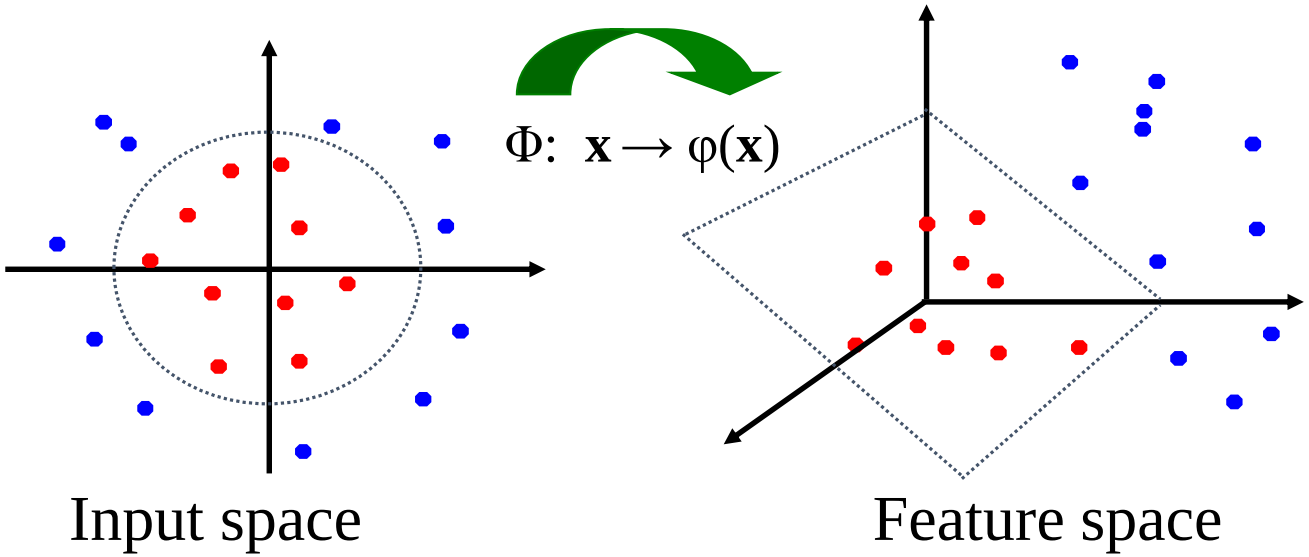
Data dari **R**^{1} ditransformasi ke **R**^{2}





Permasalahan Non-linear

- Kemungkinan problem transformasi
  - Komputasi yang tinggi dan sulit memperoleh estimasi bagus
- SVM menyelesaikan masalah ini secara bersamaan
  - Kernel tricks untuk komputasi yg efisien
  - Meminimalkan $||\boldsymbol{w}||^2$ dapat menghasilkan classifier yang baik



Kernel Trick

- Hubungan antara fungsi kernel K dan mapping $\phi(.)$

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \langle \phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y}) \rangle$$

  ✓Disebut sebagai **kernel trick**

- Secara intuitif, $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ merepresentasikan kemiripan antara data $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$, dan ini diperoleh dari pengetahuan sebelumnya

Jenis-jenis Fungsi Kernel

No	Nama Kernel	Definisi Fungsi
1	Linier	$K(x,y) = x.y$
2	Polinomial of degree up to d	$K(x,y) = (x.y + c)^d$
3	Gaussian RBF	$K(x,y) = \exp\left(\frac{-\lVert x-y \rVert^2}{2\sigma^2}\right)$
4	Sigmoid (Tanh Hiperbolik)	$K(x,y) = \tanh(\sigma(x.y)+c)$

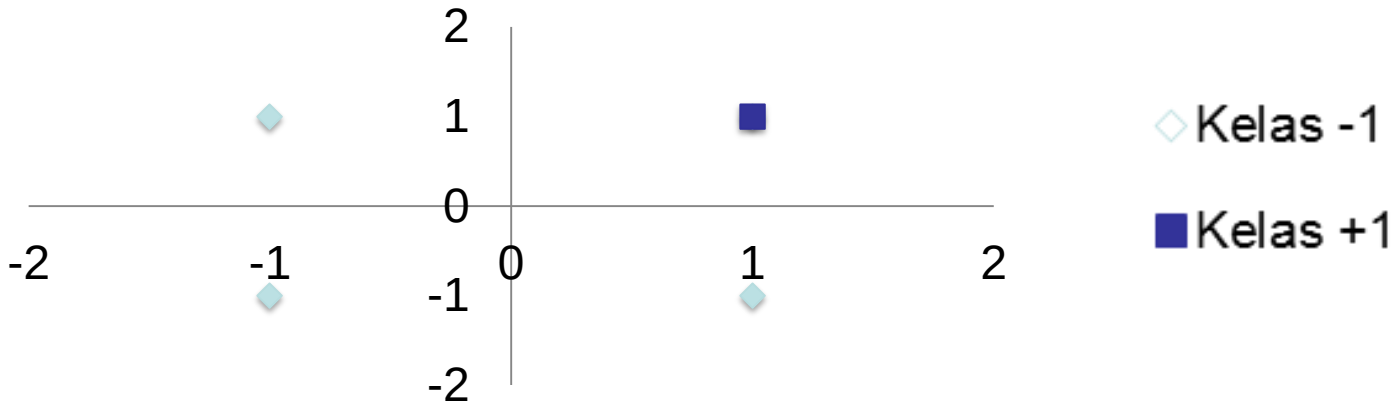
Contoh

- Contoh SVM Linier pada dataset berikut :

  Tentukan Hyperplanenya !

x_1	x_2	Kelas (y)	Support Vector (SV)
1	1	1	1
1	-1	-1	1
-1	1	-1	1
-1	-1	-1	0

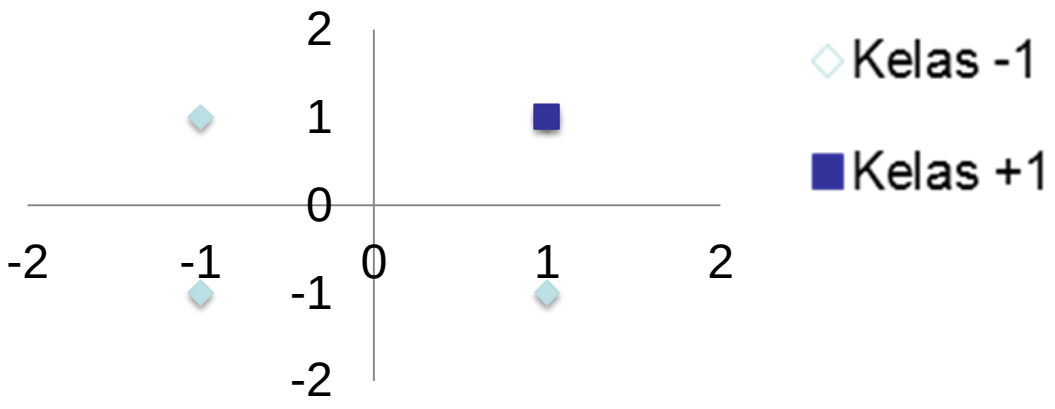
- Bentuk Visualisasi data :



Contoh

- Contoh SVM Linier :

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	1
1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	-1



- Karena ada dua fitur (x_1 dan x_2), maka w juga akan memiliki 2 fitur (w_1 dan w_2).
- Formulasi yang digunakan adalah sebagai berikut :
  - Meminimalkan nilai : $\frac{1}{2}\|w\|^2 = \frac{1}{2}({w_1}^2 + {w_2}^2)$
  - Syarat :

$$y_i(w.x_i + b) \geq 1, \qquad i = 1,2,3,\ldots\ldots,N$$

Contoh

- Karena ada dua fitur (x_1 dan x_2), maka w juga akan memiliki 2 fitur (w_1 dan w_2).
- Formulasi yang digunakan adalah sebagai berikut :
  - Meminimalkan nilai margin :

$$\frac{1}{2}\|w\|^2 = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2)$$

  - Syarat :

$$y_i(w.x_i + b) \geq 1, dimana\ i = 1,2,3, \dots, N$$
$$y_i(w_1.x_1 + w_2.x_2 + b) \geq 1$$

x_1	x_2	Kelas (y)
1	1	1
1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	-1

Sehingga didapatkan beberapa persamaan berikut :

1. $(w_1 + w_2 + b) \geq 1, untuk\ y_1 = 1, x_1 = 1, x_2 = 1$
2. $(-w_1 + w_2 - b) \geq 1, untuk\ y_2 = -1, x_1 = 1, x_2 = -1$
3. $(w_1 - w_2 - b) \geq 1, untuk\ y_3 = -1, x_1 = -1, x_2 = 1$
4. $(w_1 + w_2 - b) \geq 1, untuk\ y_4 = -1, x_1 = -1, x_2 = -1$

Contoh

Dari 4 persamaan berikut, carilah nilai w_1, w_2 dan b

1. $(w_1 + w_2 + b) \geq 1$
2. $(-w_1 + w_2 - b) \geq 1$
3. $(w_1 - w_2 - b) \geq 1$
4. $(w_1 + w_2 - b) \geq 1$

Tahap 1: Jumlahkan persamaan (1) dan (2)

$$(w_1 + w_2 + b) \geq 1$$
$$(-w_1 + w_2 - b) \geq 1$$
$$\text{----------} +$$
$$2w_2 = 2$$

Maka $w_2 = 1$

Tahap 2: Jumlahkan persamaan (1) dan (3):

$$(w_1 + w_2 + b) \geq 1$$
$$(w_1 - w_2 - b) \geq 1$$
$$\text{----------} +$$
$$2w_1 = 2$$

Maka $w_1 = 1$

Tahap 3: Jumlahkan persamaan (2) dan (3):

$$(-w_1 + w_2 - b) \geq 1$$
$$(w_1 - w_2 - b) \geq 1$$
$$\text{----------}$$
$$-2b = 2$$

Maka $b = -1$

Tahap 4: didapatkan persamaan *hyperplane*

$$w_1.x_1 + w_2.x_2 + b = 0$$
$$x_1 + x_2 - 1 = 0$$
$$x_2 = 1 - x_1$$

Contoh

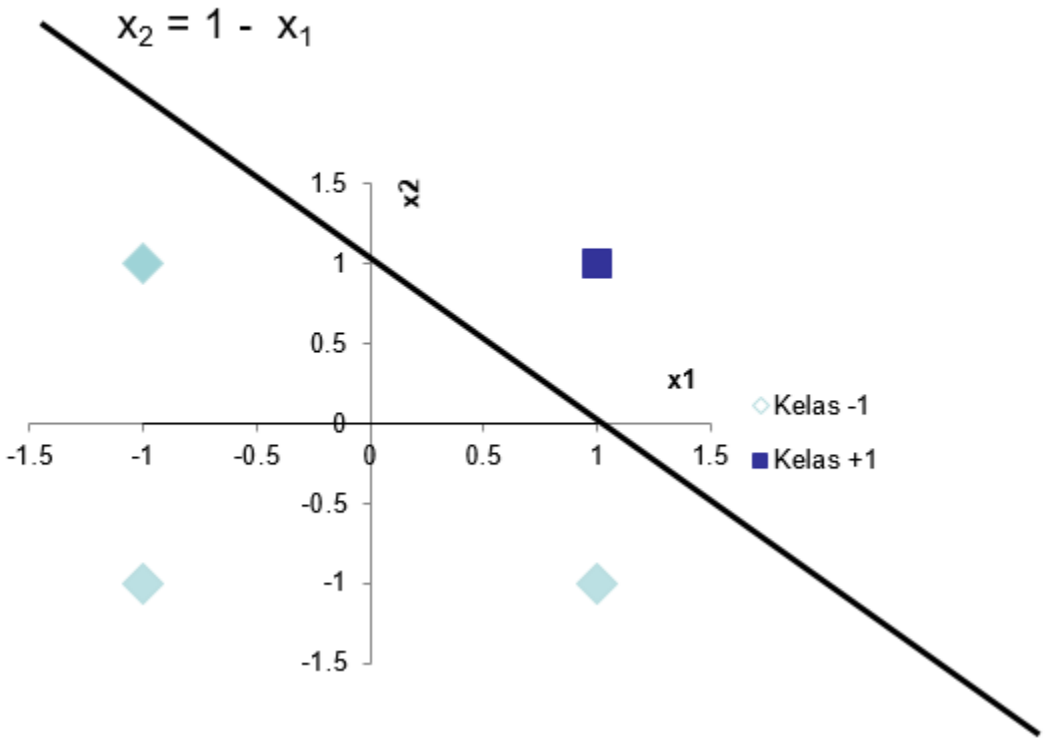
Visualisasi garis hyperplane (sebagai fungsi klasifikasi) :

$w_1x_1 + w_2x_2 + b = 0$

$x_1 + x_2 - 1 = 0$

$x_2 = 1 - x_1$

x_1	$x_2 = 1 - x_1$
-2	3
-1	2
0	1
1	0
2	-1



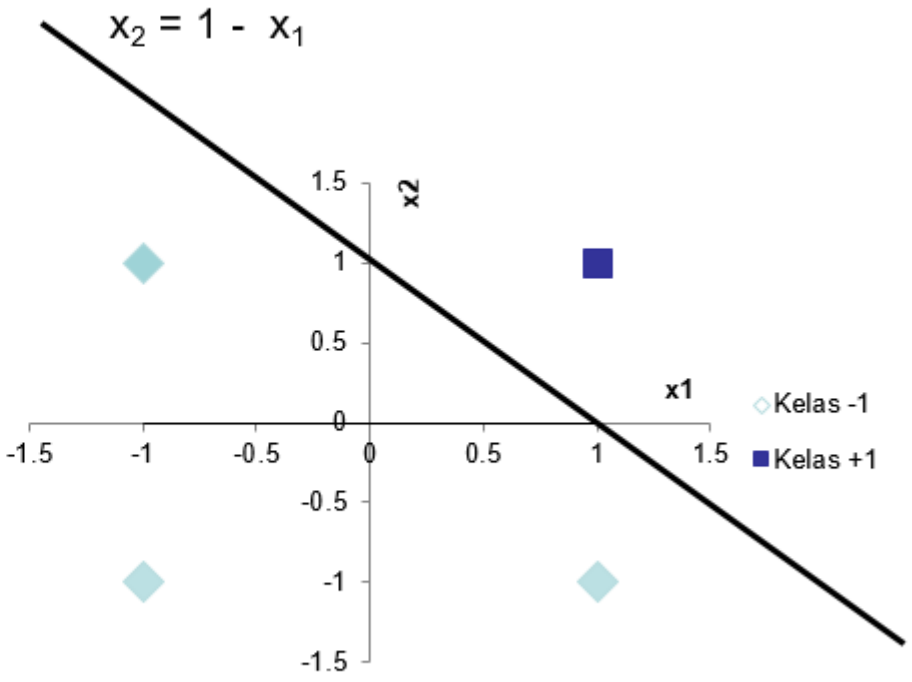
Contoh

Misalkan diketahui data uji/ data testing berikut :

Diketahui : $f(x) = x_1 + x_2 - 1$

Kelas = sign(f(x))

No	Data Uji		Hasil Klasifikasi
	x_1	x_2	Kelas = sign($x_1 + x_2$ - 1)
1	1	5	sign (1 + 5 - 1) = +1
2	-1	4	sign (-1 + 4 - 1) = +1
3	0	7	sign (0 + 7 - 1) = +1
4	-9	0	sign (-9 + 0 - 1) = -1
5	2	-2	sign (2 - 2 - 1) = -1



Kelebihan dan Kekurangan

Training relatif mudah

- tidak mengalami local optimal, tidak seperti pada neural networks

Relatif baik untuk data berdimensi tinggi

Tradeoff antara kompleksitas classifier dan kesalahan dapat dikontrol secara eksplisit

Data non-tradisional seperti string dan tree dapat digunakan sebagai input ke SVM, bukan vektor fitur

KEKURANGAN

Membutuhkan fungsi kernel yang bagus

SVM vs Neural Networks

SVM

- Konsep yang relatif baru
- Sifat generalisasi yang bagus
- Sulit untuk dipelajari → teknik QP (Quadratic Programming)
- Menggunakan kernel, dapat mempelajari fungsi yang sangat kompleks

ANN

- Men-generalisasi dengan baik tetapi tidak memiliki dasar matematika
- Dapat dengan mudah dipelajari secara bertahap
- Untuk mempelajari fungsi kompleks → gunakan struktur multi layer yang kompleks.

Referensi

- https://youtu.be/_PwhiWxHK8o
- http://www.cs.cmu.edu/~awm/tutorials
- http://bio.img.cas.cz/zikar
- http://www.cise.ufl.edu/class/cis4930sp11dtm/notes/intro_svm_new.pdf
- https://youtu.be/H9yACitf-KM
- Introduction to Support Vector Machines (SVM), By Debprakash Patnaik M.E (SSA)

Terima Kasih