VII – Transformasi Z

Erwin Sutanto, S.T., M.Sc.

Daftar Isi

1. Pendahuluan

- Sebagaimana sebelumnya kita telah mempelajari **Discrete-Time Fourier Transform**, untuk mendapatkan representasi frekuensi-nya. Pada bab ini, kita akan membahas penggunaan Z-Transform. Transformasi ini lebih baik dibandingkan dengan **DTFT**. Dimana DTFT memiliki keterbatasan, di mana:
  - Perhitungan DTFT cukup rumit untuk menyelesaikan sinyal umum seperti
  - DTFT tidak dapat menghitung transient respond dari suatu sistem yang memiliki kondisi awal dan masukan yang berubah-rubah
- Dengan kata lain, untuk menghitung representasi sebuah sistem secara lengkap, berikut dengan transient respon nya, kita mungkin lebih mudah dengan menggunakan **Transformasi Z**.
- Demikian juga sebuah **Persamaan Beda**.

Hubungannya dengan Laplace Transform

- Sebagaimana Laplace Transform mempunyai peranan yang cukup besar untuk menyelesaikan persamaan differensial linear dengan constant coefficient. Demikian juga z-transform dalam menyelesaikan persamaan beda linear dengan constant coefficient.
- Sebagai mana juga **Laplace Transform** mentransformasikan **persamaan differensial** ke **bidang s** (**s-plane**). Demikian juga **Z-Transform** mentransformasikan **persamaan beda** ke **bidang Z** (**z-plane**). Berikut definisi Z-Transform:

$$Z[x(n)] \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = X(z) \qquad\qquad z = r.e^{jw}$$

- Apabila r=1, maka transformasi Z ini akan dievaluasi dalam lingkaran dengan **jari-jari=1** dan memiliki persamaan dari **Transformasi Fourier DTFT**.
- Kumpulan nilai z dalam lingkaran bilangan kompleks tersebut yang jumlahnya konvergen disebut sebagai **daerah konvergensi** (**Region Of Convergerace**), ROC.

Latihan-1 & 2

1) Tentukan nilai Transformasi-Z dari

$$x[n] = a^n u(n)$$

beserta daerah Konvergensi (ROC) –nya ?

2) Tentukan nilai Transformasi-Z dari

$$x[n] = -b^n u(-n-1)$$

beserta daerah Konvergensi (ROC) –nya ?

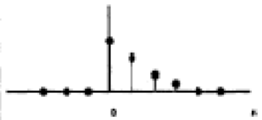
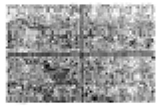
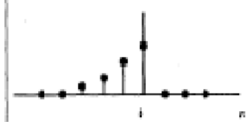
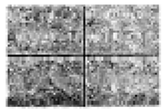
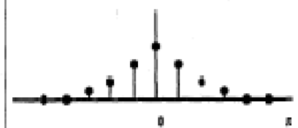
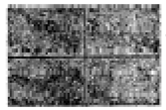
2. Karakteristik Transformasi Z

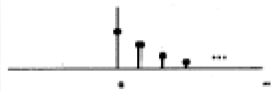
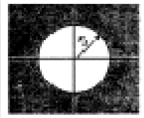
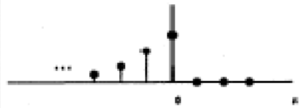
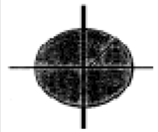
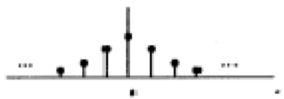
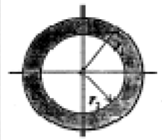
- Karakteristik Transformasi Z bisa dilihat dari Tiga tabel yang akan dijelaskan.

(2.1) Pasangan Transformasi-Z

Sequence	*Transform*	*ROC*
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\frac{1}{1 \quad z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-b^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-bz^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert b\rvert$
$[a^n \sin\omega_0 n]\, u(n)$	$\frac{(a\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2a\cos\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$[a^n \cos\omega_0 n]\, u(n)$	$\frac{1-(a\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2a\cos\omega_0)z^{\ 1}+a^2z^{\ 2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-nb^n u(-n-1)$	$\frac{bz^{-1}}{(1-bz^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert b\rvert$

2.2 Karakteristik ROC

Sinyal	ROC
Sinyal terbatas (finite-duration signal)	
Causal 	Seluruh bidang z kecuali $z = 0$ 
Antikausal 	Seluruh bidang kecuali $z = \infty$ 
Dua-sisi 	Seluruh bidang z kecuali $z = 0$ dan $z = \infty$ 

Sinyal	ROC
Sinyal tak-terbatas (infinite-duration signals)	
Kausal 	$\|z\| > r_2$ 
Antikausal 	$\|z\| < r_1$ 
Dua-sisi 	$r_2 < \|z\| < r_1$ 

- Pemberian nama umum untuk sinyal transformasi Z disesuaikan dengan posisi sinyal nya. Untuk Sinyal Causal di mana x[n]=0 untuk $n < n_0 < 0$, umumnya disebut sinyal sisi-kanan (right-sided signal). Untuk Sinyal Antikausal di mana x[n]=0 untuk $n > n_0 > 0$, umumnya disebut sinyal sisi-kiri (rleft-sided signal).
- Untuk sinyal yang berada di kedua sisi biasa disebut sinyal sisi-ganda (double-sided signal). Di mana rumus umumnya di awal. Sedangkan untuk sisi-tunggal (one-sided atau unilateral) secara umum diberikan, sbb:

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

2.3 Properties

1. **Linearity:**

$$\mathcal{Z}\left[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\right] = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z); \quad \text{ROC: ROC}_{x_1} \cap \text{ROC}_{x_2} \tag{4.4}$$

2. **Sample shifting:**

$$\mathcal{Z}\left[x\left(n - n_0\right)\right] = z^{-n_0} X(z); \quad \text{ROC: ROC}_x \tag{4.5}$$

3. **Frequency shifting:**

$$\mathcal{Z}\left[a^n x(n)\right] = X\left(\frac{z}{a}\right); \quad \text{ROC: ROC}_x \text{ scaled by } |a| \tag{4.6}$$

4. **Folding:**

$$\mathcal{Z}\left[x(-n)\right] = X(1/z); \quad \text{ROC: Inverted ROC}_x \tag{4.7}$$

5. **Complex conjugation:**

$$\mathcal{Z}\left[x^*(n)\right] = X^*(z^*); \quad \text{ROC: ROC}_x \tag{4.8}$$

Latihan-3 & 4

3) Tentukan nilai Z-Transform dan ROC-nya untuk deret berikut:

$X_1[n]= \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$X_2[n]= \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

4) Tentukan Transformasi Z dan ROC dari penjumlahan deret waktu positif dan negatif yang diberikan pada contoh sebelumnya:

$$y[n] = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$$

3. Transformasi Z dari Sistem LTI

- Kita telah mengetahui jika suatu masukan x(n) pada sistem yang mempunyai respons impuls h(n) maka keluarannya, y(n), dapat dihitung dengan melakukan konvolusi antara x(n) dan h(n). Dalam domain z dapat dituliskan sebagai:

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)=H(z)\,X(z)$$

- Untuk persamaan beda secara umum:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

- Dengan Transformasi Z, maka persamaan berubah menjadi:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^{N} a_k Y(z) z^{-k}$$

Fungsi Transfer H(z)

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^{N} a_k Y(z) z^{-k} \quad \Longleftrightarrow \quad Y(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right) = X(z)\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)$$

- Fungsi Transfer H(z), menjadi sebuah persamaan umum pole dan zero:

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)}{\left(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right)}}$$

Persamaan ini secara umum disebut sebagai *pole-zero system*. Ini karena kita dapat memperoleh pole dan zero system dengan melakukan faktorisasi polynomial persamaan tersebut untuk mendapatkan akar-akarnya.

Latihan-5

3) Sebuah fungsi kausal diberikan sbb:

$$y[n]=0.9\ y[n-1] + x[n]$$

a) Tentukan fungsi H(z) dan sketsa pole dan zero-nya

b) Tentukan impulse Responnya, h(n)