VI – Fast Fourier Transform

Erwin Sutanto, S.T., M.Sc.

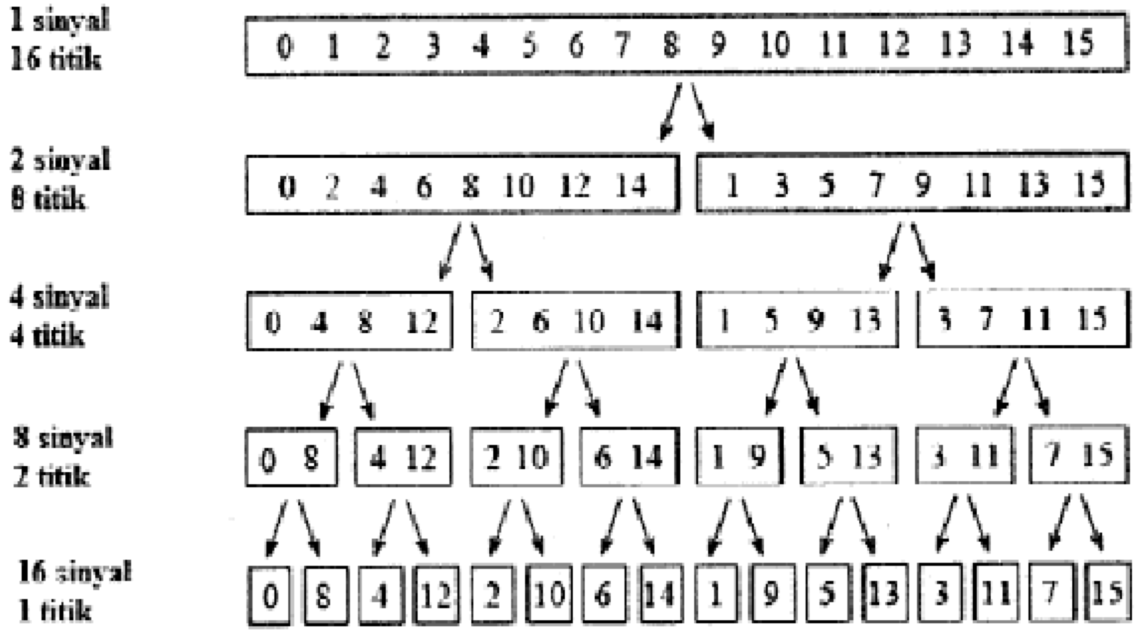
Daftar Isi

1. Definisi

- Transformasi FFT pada dasarnya memperbaiki perhitungan DFT.
- Dari DFT, jumlah operasi perhitungan yang dilakukan kurang lebih sebanyak:
  - Jumlah perkalian = N2 → Tidak Efisien
  - Jumlah perjumlahan = N (N-1)
- Untuk mempercepat perhitungan DFT, Cooley dan Turkey mengajukan suatu algoritma yang lebih cepat dan efisien.
- Algoritma tersebut adalah Fast Fourier Transform.
- Transformasi FFT ini dibagi menjadi dua, yakni: **desimasi-dalam-waktu** (decimation-in-time) dan **desimasi-dalam-frekuensi** (decimation-in-frequency).

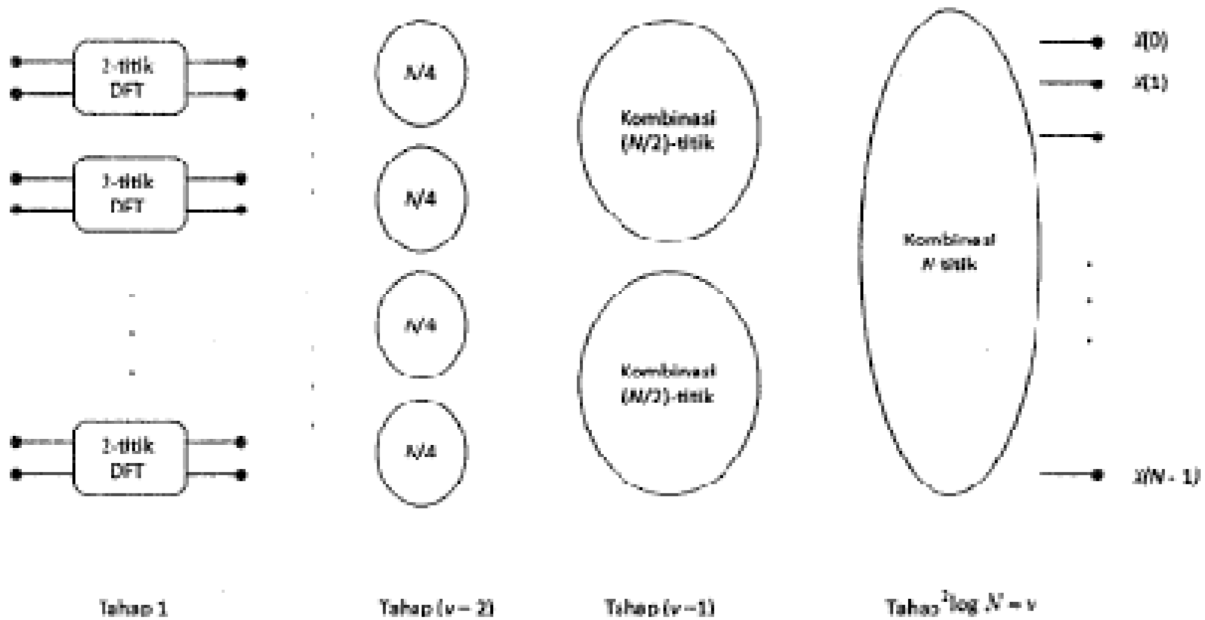
2. Desimasi dalam Waktu

- Prinsip algoritma ini adalah memecah N-titik menjadi dua (N/2) titik, kemudian membagi lagi tiap bagian tersebut menjadi dua (N/4) titik, begitu seterusnya sampai hanya terdapat 1 titik.
- Untuk itu kita harus memiliki jumlah titik genap, N=2v dengan v= 2, 3, 4, …. Berikut contoh perhitungan desimasi-dalam-waktu untuk 16 titik.



Desimasi Untuk 16 titik

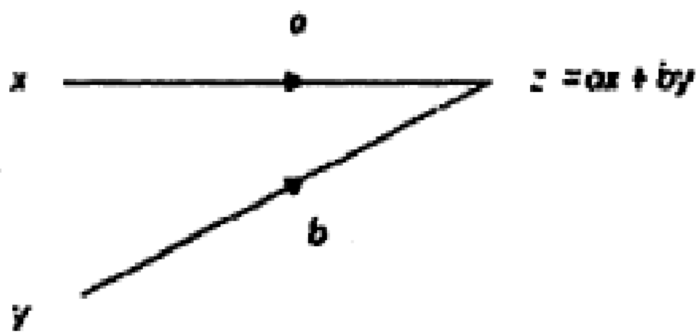
Konsep FFT



- Proses desimasi membagi perhitungan DFT 16 titik sebelumnya ke perhitungan DFT 2 titik saja. Konsep ini membentuk konsep FFT seperti di atas.
- Konsep membagi dua dalam perhitungan tersebut juga sering disebut sebagai metode kupu-kupu (butterfly method).

Struktur dasar

- Struktur dasar metode kupu-kupu dan rumus awal nya adalah sebagai berikut:



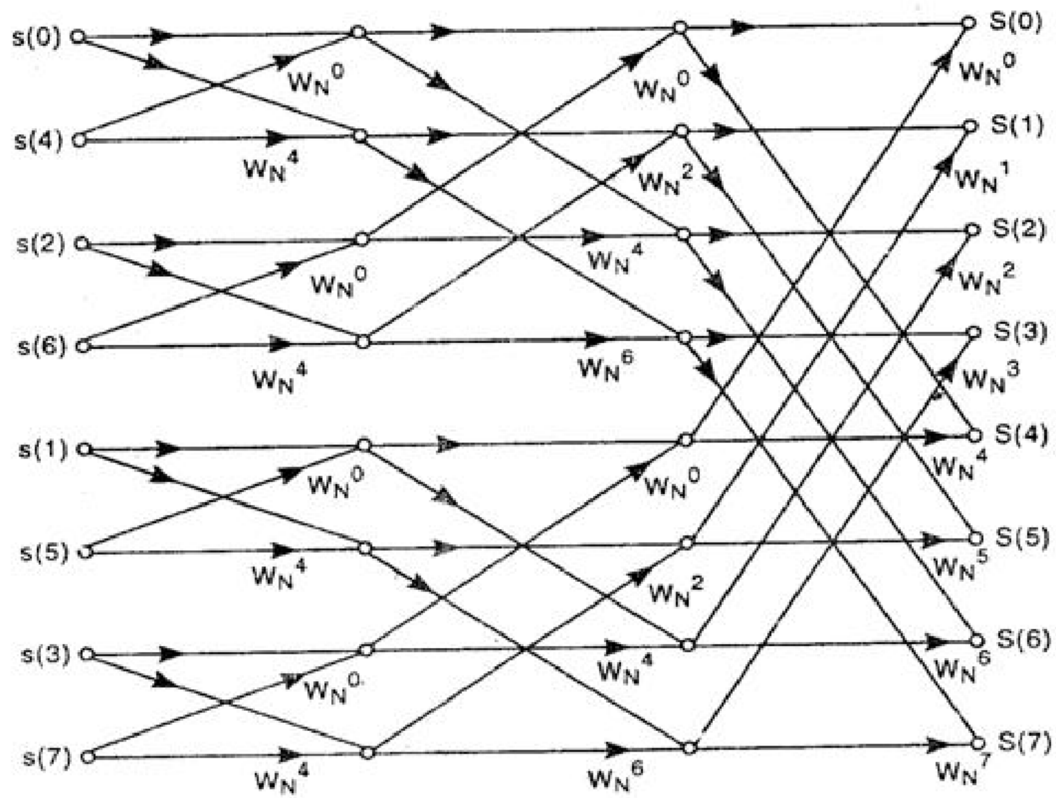
Struktur Dasar Metode Butterfly

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N-2} x[n].W_N^{kn} + \sum_{r=1}^{N-1} x[n].W_N^{kn}$$

DFT(N/2)-titik dari yang berindex genap

DFT(N/2)-titik dari yang berindex ganjil

Realisasi Desimasi dalam Waktu Untuk 8 titik sampling



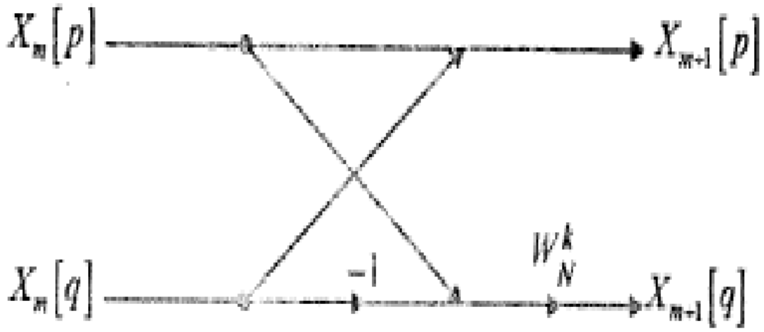
Contoh konsep FFT dengan metode desimasi-dalam-waktu untuk 8 titik sample

Latihan-1

Gambarkan perhitungan 4-titik DFT menggunakan konsep FFT metode desimasi-dalam-waktu ?

3. Desimasi dalam Frekuensi

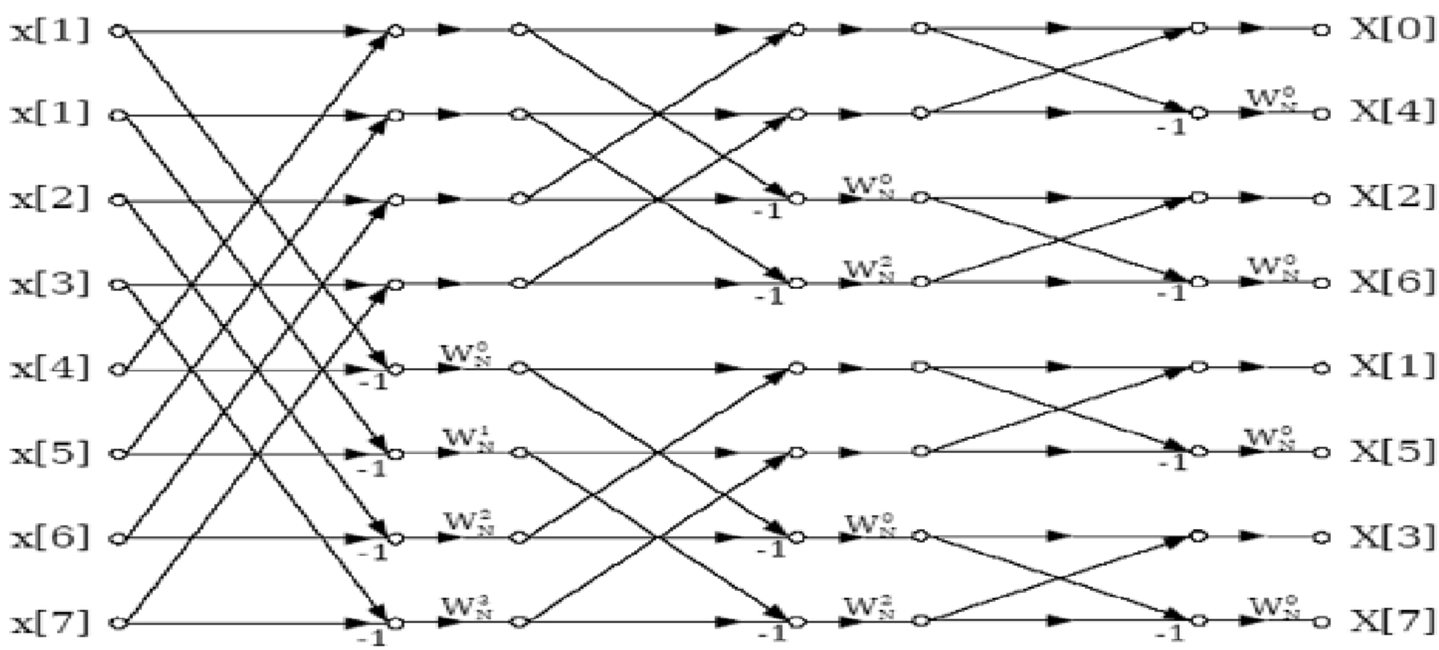
- Algoritma desimasi-dalam-frekuensi ini dilakukan dengan memecah nilai transformasinya, sebagai berikut:



Struktur Dasar Desimasi-dalam-Frekuensi

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[n.W_N^{kn} + \sum_{r=N/2}^{N-1} x[n].W_N^{kn}$$

Realisasi Desimasi dalam Frekuensi Untuk 8 titik sampling



Struktur desimasi-dalam-frekuensi untuk N=8

Latihan-2

Hitung FFT dengan menggunakan metode desimasi-dalam-frekuensi untuk sinyal berikut:

$x[n] = \{\ 1\ -1\ -1\ -1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ -1\ \}$

4. Invers Fast Fourier Transform (IFFT)

- Invers FFT kurang lebih sama dengan invers dari DFT hanya saja pangkat eksponensial dan factor pengalinya beda. Oleh karena itu, diagram butterfly IFFT sama dengan FFT namun berbeda di:
  1. x[n] digantikan dengan X[k],
  2. data masukan dikalikan dengan 1/N,
  3. dan, pangkat WN berubah menjadi negatif.
- Berikut rumus yang dapat merepresentasikan prosedur di atas. Didapatkan dengan menggunakan konjugat kompleks dari persamaan IDFT:

$$x^*[n] = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \right)^*$$

Penyederhanaan IFFT

$$x^*[n] = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \right)^*$$

- Dimana dituliskan kembali menjadi:

$$x^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X^*[k] W_N^{kn} \quad \Longleftrightarrow \quad x^*[n] = \left(\frac{1}{N} \right) DFT\left(X^*[k] \right)$$

- Untuk nilai x[n] dapat kita hitung sbb:

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{N} \left(FFT\left(X^*[k] \right) \right)^*}$$